Εισαγωγή στην Τοπολογία | 26-2-20

2ο Μάθημα.

α) Προηγ. μάθημα

β) $|\rho(a,\beta)-\rho(\gamma,\delta)| \leq \rho(a,\gamma)+\rho(\beta,\delta)$

<u>Λύση</u>: $-(\rho(a,\gamma)+\rho(\beta,\delta)) \leq \rho(a,\beta)-\rho(\gamma,\delta) \leq \rho(a,\gamma)+\rho(\beta,\delta)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \rho(a,\beta) \leq \rho(a,\gamma)+\rho(\gamma,\delta)+\rho(\beta,\delta) & (3) \\ \rho(\gamma,\delta) \leq \rho(a,\beta)+\rho(a,\gamma)+\rho(\beta,\delta) & (4) \end{cases}$$

Αρκεί να αποδείξουμε τις (3), (4).

Από τριγ. ανισότητα:

$$\rho(a,\beta) \leq \rho(a,\gamma)+\rho(\gamma,\beta) \leq \rho(a,\gamma)+\rho(\gamma,\delta)+\rho(\delta,\beta) \underset{\text{ιδιοτ.}}{\overset{\text{συμμ.}}{=}} \rho(a,\gamma)+\rho(\gamma,\delta)+\rho(\beta,\delta).$$

Επίσης από τριγ. ανισότητα:

$$\rho(\gamma,\delta) \leq \rho(\gamma,a)+\rho(a,\delta) \leq \rho(\gamma,a)+\rho(a,\beta)+\rho(\beta,\delta) \underset{\text{ιδιοτ}}{\overset{\text{συμμ}}{=}} \rho(a,\beta)+\rho(a,\gamma)+\rho(\beta,\delta)$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $\rho$ η μετρική που ορίζει η νόρμα αυτή ($\rho(x,y)=\|x-y\|$, $\forall x,y \in X$), αυτή η $\rho$ έχει επιπλέον τις ιδιότητες:

1) Είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις
$\cdot\ \rho(x+z,y+z)=\rho(x,y)$, $\forall x,y,z \in X$.

$\cdot\ p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot p(x,y)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in X.$

<u>Άσκηση (Σπίτι)</u>: Αν $X$ διαν. χώρος και $p$ μια μετρική στο $X$ ώστε να ισχύει:

α) $p(x+z, y+z) = p(x,y), \forall x,y,z \in X$

β) $p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot p(x,y), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x,y \in X.$

τότε η μετρική $p$ προέρχεται απο νόρμα.

<u>Υπόδειξη</u>: Ορίζουμε $\|x\| = p(x,0), \forall x \in X$

πρέπει ν.δ.ο.: $\begin{cases} \|\cdot\| \text{ νόρμα} \\ \text{Η } p \text{ είναι μετρική που προέρχεται απο την } \|\cdot\| \end{cases}$

<u>Άσκηση</u>: Αν $(X,p)$ μετρικός χώρος ορίζουμε $d(x,y) = \min\{1, p(x,y)\}, \forall x,y \in X$. ν.δ.ο. $d$ μετρική.

<u>Απόδειξη</u>: α) $d(x,y) \geq 0\ \forall x,y \in X$ (διότι $1 \geq 0, p(x,y) \geq 0$)

β) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, p(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow p(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$

γ) $d(y,x) = \min\{1, p(y,x)\} = \min\{1, p(x,y)\} = d(x,y).$

δ) Τριγ. ανισότητα, έστω $x,y,z \in X$. Θα δ.ο. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

- Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $1 \leq p(x,y)$ ή $1 \leq p(y,z)$

Τότε αν $1 \leq p(x,y)$

$d(x,z) = \min\{1, p(x,z)\} \leq 1 = d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Ομοιως αν $1 \le \rho(y,z)$.

2) $\rho(x,y) < 1$ και $\rho(y,z) < 1$ τότε:

$$d(x,z) = \min\{1, \rho(x,z)\} \le \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) = d(x,y) + d(y,z).$$

<u>Απεδ</u>.

## <u>Ανισοτητες που συνδέουν τις $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_p$, $p \ge 1$ στον $\mathbb{R}^k$.</u>

Για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_p \le k^{1/p} \|\vec{x}\|_\infty$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\forall i = 1, \dots, k: \quad |x_i| \le \left( \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p} = \|\vec{x}\|_p$$

Αρα $\max\{|x_i|, i = 1, \dots, k\} \le \|\vec{x}\|_p$ δηλαδή $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_p$. (1)

Έστω $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ ώστε $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, k\}$,

τότε $|x_i| \le \|\vec{x}\|_\infty$ $\forall i = 1, \dots, k \Rightarrow |x_i|^p \le \|\vec{x}\|_\infty^p$, $\forall i = 1, \dots, k$,

Αθροίζοντας κατα μέλη τις $k$-αυτες ανισοτητες εχουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \le k \cdot \|\vec{x}\|_\infty^p \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \right)^{1/p} \le k^{1/p} \cdot \|\vec{x}\|_\infty \Rightarrow$$

$$\|\vec{x}\|_p \le k^{1/p} \cdot \|\vec{x}\|_\infty \quad (2)$$

Απο (1), (2) δείξαμε το ζητούμενο.

## <u>Οι μετρικες που ορίζουν οι $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$ στον $\mathbb{R}^k$ και οι ανισοτητες που τις συνδέουν.</u>

Για $1 \le p \le \infty$: $\rho_p(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_p$.

Σύμφωνα με την ανισότητα που αποδείξαμε προηγουμένως έχουμε: $\rho_\infty(\vec{x}, \vec{y}) \le \rho_p(\vec{x}, \vec{y}) \le k^{1/p} \rho_\infty(\vec{x}, \vec{y})$

## Διάμετρος Συνόλου

**Ορισμός:** Έστω $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, με $A \neq \emptyset$

Ορίζουμε τη διάμετρο του $A$ ($\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{διαμ}(A)$),

με $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\rho(x,y) : x \in A, y \in A\}$

[όπου $\sup B = +\infty$, για $B \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι άνω φραγμένο].

**Παραδείγματα:** i) Έστω $(\mathbb{R}, \rho)$ όπου $\rho$ η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$.

$(\rho(x,y) = |x-y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R})$

Αν $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\mathrm{diam}([a,b]) = b-a$

επίσης $\mathrm{diam}([a,b]) = \mathrm{dim}((a,b]) =$

$= \mathrm{diam}([a,b)) = b-a$.

$\mathrm{diam}((a,+\infty)) = \mathrm{diam}([a,+\infty)) =$

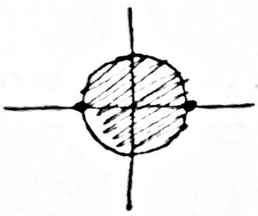
$= \mathrm{diam}((-\infty,a)) = \mathrm{diam}((-\infty,a]) = +\infty$

Άρα $\mathrm{diam}\,\mathbb{R} = +\infty$.

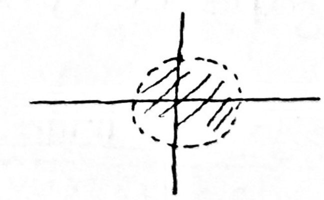
ii) Στο $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$, όπου $\rho_2$ η ευκλείδεια μετρική.

$\rho_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

Για $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$

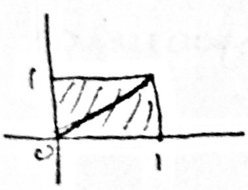


$\mathrm{diam}(A) = 2$



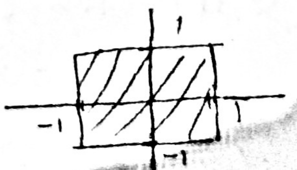
$\mathrm{diam}(B) = 2$

$C = [0,1] \times [0,1]$



$\mathrm{diam}(C) = \sqrt{2}$

$D = [-1,1] \times [-1,1]$



$\mathrm{diam}(D) = 2\sqrt{2}$

ιιι) Αν $\rho$ η διακριτή μετρική στο $X$. Για $A \neq \emptyset$:

α) Αν το $A$ είναι μονοσύνολο $\operatorname{diam}(A) = 0$

β) Αν το $A$ έχει δύο τουλάχιστον στοιχεία $\operatorname{diam}(A) = 1$.

<u>Υπενθύμιση</u>: Αν $B \subseteq \mathbb{R}$ και $M \in \mathbb{R}$

$\sup B \leq M \iff \forall x \in B \quad x \leq M$

$\sup B \geq M \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B: x > M - \varepsilon$

$\inf B \geq M \iff x \in B, x \geq M$

$\inf B \leq M \iff \forall \varepsilon > 0, \exists x \in B$

Αν $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b \iff a < b + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

<u>Ορισμός</u>: Ένα υποσύνολο $A$ ενός μετρικού χώρου $(X, \rho)$ λέγεται φραγμένο, αν $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

$(\iff \exists c > 0 : \rho(x,y) \leq c, \forall x, y \in A)$

## <u>Απόσταση σημείου από σύνολο και απόσταση συνόλων:</u>

- Αν $(X, \rho)$ μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$ και $x \in X$, ορίζουμε την απόσταση του $x$ από το $A$:

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$$

- Αν $(X, \rho)$ μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$ με $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ η απόσταση του $A$ από το $B$ ορίζεται να είναι:

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\}.$$

<u>Παρατήρηση</u>: $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$

<u>Παρατηρήσεις</u>: α) Προφανώς $\rho(x, A) \geq 0$, $\rho(A, B) \geq 0$

β) Αν $x \in A$ τότε $\rho(x, A) = 0$

γ) Ενδέχεται $\rho(x, A) = 0$, χωρίς να ισχύει $x \in A$.

· στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $\rho$
$\rho(0,(0,1)) = \inf\{|0-x| : x\in(0,1)\} = 0$ ενώ προφανώς
$0 \notin (0,1)$

Παρατήρηση: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος, $A\subseteq X$, $A\neq\emptyset$
τότε $\forall a,b\in X: |\rho(a,A)-\rho(b,A)| \leq \rho(a,b)$

Απόδειξη: $\forall x\in A$ ισχύει $\rho(a,A)\leq\rho(a,x)\leq\rho(a,b)+\rho(b,x) \Rightarrow$

$$\underbrace{\rho(a,A)-\rho(a,b)}_{\text{πραγμ. αριθμός}} \leq \underbrace{\rho(b,x)}_{\text{σύνολο.}} \quad \forall x\in A.$$

Άρα $\rho(a,A)-\rho(a,b)\leq \inf\{\rho(b,x) : x\in A\} \Rightarrow$

$\rho(a,A)-\rho(a,b)\leq\rho(b,A) \Rightarrow$

$\boxed{\rho(a,A)-\rho(b,A)\leq\rho(a,b)}$ (1).

Εφόσον η (1) έχει αποδειχθεί για τυχαία $a,b\in A$ προκύπτει (εναλλάσσοντας το ρόλο των $a,b$) ότι

$\rho(b,A)-\rho(a,A)\leq\rho(b,a) \Rightarrow$

$\boxed{\rho(b,A)-\rho(a,A)\leq\rho(a,b)}$ (2)

$(1),(2) \Rightarrow |\rho(a,A)-\rho(b,A)|\leq\rho(a,b).$

---

## (Ακολουθίες)

Αν $X\neq\emptyset$ σύνολο ονομάζουμε ακολουθία στο $X$ κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to X$. Αν συμβολίσουμε $f(n)=x_n$, μπορούμε να αναφερόμαστε στην παραπάνω ακολουθία λέγοντας "η ακολουθία $(x_n)$" ή "η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$".

Τα $x_n$ λέγονται όροι της ακολουθίας.

Έτσι $x_1$, ο πρώτος όρος

$x_2$, δεύτερος

$x_3$, τρίτος

$\vdots$

$x_n$, n-οστός όρος.

Οι όροι μιας ακολουθίας δεν είναι απαραίτητα διαφορετικοί μεταξύ τους. <u>π.χ.</u> αν $a \in X$ και $x_n = a$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έχουμε μια σταθερή ακολουθία.

<u>Υπακολουθίες</u>: Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στο X και $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ φυσικοί αριθμοί, τότε η ακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή η ακολουθία με όρους $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots$ λέγεται υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Οι δείκτες $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αποτελούν μια γν. αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. $\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{x} X$

Η υπακολουθία δηλαδή είναι ουσιαστικά η συνθήκη.

Για παράδειγμα η $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ (δηλ. η $x_2, x_4, x_6, \dots$) είναι η υπακολουθία των άρτιων όρων της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και η $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ (δηλ. η $x_1, x_3, x_5, \dots$) είναι η υπακολουθία των περιττών όρων της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $(x_{k_n})$ υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τότε $k_n \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Απόδειξη (με επαγωγή)</u>: $k_1 \geq 1$ (αφού $k_1 \in \mathbb{N}$)

Υποθέτουμε ότι $k_n \geq n$, τότε αφού:

$k_{n+1} > k_n \geq n$.

Υπενθύμιση: ακολουθίες στο $\mathbb{R}$.

Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πραγμ. αριθμών και $x_0\in\mathbb{R}$ λέμε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x_0$ (συμβ. $x_n\to x_0$) αν $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists n_0\in\mathbb{N})$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n\geq n_0$ να ισχύει $|x_n-x_0|<\varepsilon$.

Απο Απ. Λογ. I είναι γνωστά τα εξής:

α) Το όριο μιας ακολουθίας (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

γ) Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο μ' αυτήν.

δ) (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass): Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα ακολουθία.

Ορισμός: Έστω $(X,\rho)$ μετρικός χώρος $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $X$ και $x_0\in X$. Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $x_0$ αν $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$. Θα συμβολίζουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$. (ή απλά $x_n\to x_0$ αν είναι φανερό σε ποιά μετρική αναφερόμαστε).

Παρατήρηση: $(X,\rho)$ μ.χ. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $X$, $x_0\in X$:

$$x_n \xrightarrow{\rho} x_0 \iff \rho(x_n,x_0)\to 0$$

Ορισμός: Μια ακολ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον μ.χ. $(X,\rho)$ λέγεται φραγμένη αν το σύνολο των όρων της (δηλ. το σύνολο $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$) είναι φραγμένο.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στο $X$, $x_0\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Από τον ορισμό για $\varepsilon=1$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$, ώστε $\rho(x_n,x_0)<1$ $\forall n\geq n_0$.

Θέτουμε $C=\max\{\rho(x_i,x_0),\ i=1,2,\dots,n_0\}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$ θα ισχύει $\rho(x_n,x_0)\leq\max\{C,1\}=M$

έτσι $\forall n,m\in\mathbb{N}$: $\rho(x_n,x_m)\leq\rho(x_n,x_{n_0})+\rho(x_{n_0},x_m)\leq$ $M+M=2M$.

Άρα το σύνολο $\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο, δηλαδή η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $(X,\rho)$ μ.χ. και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο $X$.

Αν $x_n\xrightarrow{\rho} a$ και $x_n\xrightarrow{\rho} b$ τότε $a=b$, με $a,b\in X$.

<u>Απόδειξη</u>: Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο ότι $a\neq b$)

Τότε $\rho(a,b)>0$, θέτουμε $\varepsilon=\dfrac{\rho(a,b)}{2}$.

Εφόσον $x_n\xrightarrow{\rho} a$ υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_1$ να ισχύει $\rho(x_n,a)<\varepsilon$

Εφόσον $x_n\xrightarrow{\rho} b$ υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_2$ να ισχύει $\rho(x_n,b)<\varepsilon$

Έστω $m\in\mathbb{N}$ με $m\geq\max\{n_1,n_2\}$.

$$\rho(a,b) \leq \rho(a,x_m) + \rho(x_m,b)$$
$$= \rho(x_m,a) + \rho(x_m,b)$$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \rho(a,b)$$

Άρα $\rho(a,b) < \rho(a,b)$ <u>ΆΤΟΠΟ</u>, επομένως $a=b$.

<u>Παρατήρηση</u>: Το γεγονός της μοναδικότητας του ορίου μας επιτρέπει να γράφουμε $\lim x_n$ για το όριο της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όταν αυτό υπάρχει.

<u>Πρόταση</u>: Κάθε υπακολουθία μιας συγκλίνουσας ακολουθίας συγκλίνει στο ίδιο όριο μ'αυτήν.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον μ.χ. $(X,\rho)$ και $x_0\in X$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ και $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Θ.δ.ο. $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x_0$.

Έστω $\varepsilon>0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$, έτσι $\forall n\geq n_0$ ισχύει $k_n\geq n\geq n_0$ άρα $\rho(x_{k_n},x_0)<\varepsilon$

Άρα $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x_0$.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $(X,\rho)$ ο διακριτός μετρικός χώρος, $\left(\rho(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}\right)$. Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στον $(X,\rho)$ και $x_0\in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon = 1/2$ προκύπτει ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_0) < 1/2 < 1$ $\forall n \geq n_0$.

Εφόσον $\rho$ είναι η διακριτή μετρική προκύπτει ότι $x_n = x_0$, $\forall n \geq n_0$, δηλαδή η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή.

- Αν $X$ άπειρο σύνολο ~~και~~ και $\rho$ η διακ. μετρική στο $X$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από διαφορετικά ανά δύο σημεία του $X$. (δηλ. $x_n \neq x_m$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$) τότε η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη, ενώ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει καμία συγκλίνουσα υπακολουθία.